Problema teoretică nr. 1 (10 puncte) – Mișcarea browniană

Studiind la microscop particule mici de polen, de diferite dimensiuni, aflate în suspensie coloidală în apă, botanistul scoţian Robert Brown a observat (1827) că mişcarea acestora este una aleatorie şi continuă. Astăzi, acest tip de comportament poartă numele de *mişcare browniană*. Brown a mai remarcat că mişcarea particulelor de polen poate fi pusă în evidenţă doar dacă dimensiunea lor caracteristică este submicronică.

Sarcina de lucru nr.1 – Dimensiunea particulei browniene (5,75 p)

Intensitatea mişcării unei particule browniene depinde de mărimea sa, fiind independentă însă de natura materialului din care este făcută. Mişcarea browniană este cauzată de fluctuaţiile presiunii care rezultă în urma ciocnirilor suferite de particula browniană cu moleculele fluidului în care se află. Forţele care dau naştere acestei presiuni variază permanent în modul şi orientare, producând astfel mişcarea aleatorie a particulei browniene.

Scopul acestei sarcini de lucru este de a arăta că particulele submicronice participă la mişcarea browniană, pe când cele cu dimensiuni mai mari, nu! Legile dinamicii nu pot explica de ce mişcarea browniană este observabilă la particulele submicronice aflate în suspensie într-un fluid, dar calculul probabilităţilor da. În acest scop, câteva afirmaţii sunt esenţiale în rezolvarea acestei sarcini de lucru:

- ✓ *Fluctuaţiile unei mărimi fizice sunt deviaţiile valorilor ei de la valoarea medie;*
- ✓ *Probabilitatea termodinamică W de realizare a unei stări a unui sistem este dată de numărul combinărilor elementelor sistemului prin intermediul cărora se realizează starea respectivă;*
- ✓ *Timpul în care un sistem se află într-o anume stare este proporţional cu probabilitatea termodinamică de realizare a acelei stări.*

Pentru simplitate, se vor considera două particule browniene, sub formă de tijă, una cu lungimea $l_1 = 0,50\ \mu\mathrm{m}$ şi cealaltă cu lungimea $l_2 = 5,0\ \mu\mathrm{m}$, iar modelul va fi unul bidimensional. Distanţa medie dintre moleculele fluidului este de $1,0\ \mathrm{nm}$.

1.a.	Determină numărul de molecule aflate de fiecare parte a fiecărei tije, la echilibru.	1,00 p

Pentru fixarea ideilor, vom presupune că faţă de echilibru numărul de molecule ale fluidului în contact cu partea stângă a tijei este cu $6,0\ \%$ mai mic, iar cel din partea dreaptă cu $6,0\ \%$ mai mare.

1.b.	Determină mărimea fluctuației presiunii la care este supusă fiecare tijă (cu alte cuvinte, cu cât la sută este mai mare forţa de presiune exercitată de moleculele fluidului din dreapta fiecărei tije faţă de cea exercitată de moleculele fluidului din stânga ei).	1,50 p

1.c.	Determină raportul $w = \dfrac{W_{fl}}{W_{ec}}$ dintre probabilitatea termodinamică W_{fl} a stării în care numărul de molecule în contact cu tijele diferă cu $6,0\ \%$ faţă de starea de echilibru şi probabilitatea termodinamică W_{ec} a stării de echilibru, pentru fiecare tijă în parte.	1,50 p

Intervalul mediu de timp dintre două schimbări bruşte ale direcţiei de mişcare a particulei browniene este de $\tau = 1,0\ \mathrm{s}$ în condițiile fluctuației de presiune determinată mai sus.

1.d.	Determină numărul N_1 de schimbări bruşte ale direcţiei de mişcare suferite de prima tijă într-o oră, în condițiile echilibrului termodinamic.	1,00 p

1.e.	Determină intervalul de timp τ_2 cât ar trebui vizualizată tija a doua pentru a observa o schimbare bruscă a direcţiei ei de mişcare, în condițiile echilibrului termodinamic.	0,75 p

Sarcina de lucru 2: Deplasarea efectivă a particulei browniene şi legea lui Einstein (3,25 p)

Deşi s-a bucurat de o publicitate semnificativă, originea mişcării browniene a rămas în dezbatere pentru tot restul secolului al nouăsprezecelea. Teoria acestui fenomen universal, care este una statistică, a fost elaborată abia în 1905 de către fizicianul german Albert Einstein, fără notorietate la acea vreme. În esenţă, Einstein, care nu era la curent cu experimentele lui Brown, a dedus că deplasarea efectivă a particulelor, numite acum browniene, este proporţională cu rădăcina pătrată a timpului. În acest fel, Einstein a pus bazele matematice care au condus la demonstrarea existenţei atomilor, o problemă aflată într-o vie dispută în acei ani.

La $t=0$ particula browniană se afla în originea sistemului de coordonate, iar după un timp oarecare t experimentatorul înregistrează o traiectorie complicată, în zig-zag. Dacă distanţa dintre pasul $n-1$ şi pasul n al traiectoriei particulei browniene este l_n, atunci, din punct de vedere statistic, pentru un număr mare de paşi, $n>>1$, lungimea medie a unui pas poate fi considerată $l=\sqrt{\langle l_n^2 \rangle}$, unde $\langle x \rangle$ este valoarea mărimii x, mediată după numărul de paşi.

2.a.	Determină raportul dintre deplasarea efectivă a particulei browniene faţă de punctul de start şi distanţa totală parcursă de ea în fluid, d_{ef}/d în funcție de numărul de pași n şi evaluează rezultatul obţinut pentru cazul tijei submicronice care s-a mișcat timp de o oră (rezultatul obținut la sarcina de lucru **1.d.**).	2,50 p

2.b.	Dacă după timpul t de observare se măsoară viteza medie $\langle v \rangle$ a particulei browniene, dedu dependenţa de timp a deplasării efective a acesteia faţă de punctul de start.	0,75 p

Sarcina de lucru 3: Ionizarea atomilor neutri prin ciocnirea cu electroni (1,00 p)

Deoarece segmentele de dreaptă ale traiectoriei în zig-zag a particulei browniene au lungimea mult mai mare decât distanţa medie parcursă de ea între două ciocniri succesive cu moleculele fluidului în care este imersată, înseamnă că ciocnirile dintre molecule şi particula browniană care duc la modificarea bruscă a direcţiei ei de mişcare, ce vor fi numite *ciocniri relevante* în cele ce urmează, sunt evenimente relativ rare. În cazul unei plasme (un gaz ionizat cu proprietăţi speciale – a patra stare de existenţă a materiei în natură), o ciocnire relevantă poate fi considerată ciocnirea dintre un electron şi un atom neutru al gazului de lucru care duce la ionizarea atomului. Şi în acest caz, ciocnirile elastice dintre electroni şi atomii neutri sunt mult mai dese decât cele ionizante.

Într-o incintă cilindrică culcată, cu diametrul $D = 30\ \text{cm}$ şi lungimea $L = 20\ \text{cm}$, se produce o plasmă pentru care drumul liber mediu de ciocnire elastică este $\lambda_{el} = 5,0\ \text{cm}$, iar cel de ionizare este $\lambda_{ion} = 50\ \text{cm}$.

3.	Determină expresia matematică și calculează valoarea numerică pentru distanţa d_1 de la sursa de plasmă, aflată la nivelul unei baze a incintei, la care se produc ionizările.	1,00 p

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 1 (10 puncte) – Mișcarea browniană

....

1.a.	$N_1 =$ Valoare numerică: $N_1 =$ $N_2 =$ Valoare numerică: $N_2 =$	1,00p
1.b.	$f_1 =$ Valoare numerică: $f_1 =$ $f_2 =$ Valoare numerică: $f_2 =$	1,50p
1.c.	$w_1 =$ Valoare numerică: $w_1 =$ $w_2 =$ Valoare numerică: $w_2 =$	1,50p

1.d.	$N_1 =$ Valoare numerică: $N_1 =$	1,00p
1.e.	$\tau_2 =$ Valoare numerică: $\tau_2 =$	0,75p
2.a	$\frac{d_{ef}}{d} =$ Valoare numerică: $\frac{d_{ef}}{d} =$	2,50p
2.b.	$d_{ef} =$	0,75p
3.	$d_1 =$ Valoare numerică: $d_1 =$	1,00p
	Total	10p

Problema teoretică nr. 2 (10 puncte)

Traiectorii ale purtătorilor de sarcină electrică în câmpuri electrice si magnetice

Această problemă îți propune să studiezi câteva mișcări ale unor particule cu sarcină electrică în prezența unor câmpuri electrice si magnetice, să determini expresiile ce descriu traiectoriile acestora, precum și expresiile unor mărimi caracteristice mișcărilor analizate.

În cadrul fiecăreia dintre sarcinile de lucru este descris un alt sistem fizic și sunt indicate mărimile necesare pentru rezolvarea cerințelor acelei sarcini de lucru. De aceea, ai în vedere să exprimi răspunsurile la cerințele formulate în cadrul unei sarcini de lucru doar în funcție de mărimi indicate în cadrul acelei sarcini de lucru și de eventuale constante.

Dacă îți este necesar, poți folosi relațiile

$$\cosh(x) - \sinh(x) = 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arc\,sinh}(x)$$

De asemenea, dacă îți este necesar, poți folosi pentru funcția $\cosh(x)$ *relația aproximativă*

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Sarcina de lucru nr. 1

O particulă P, având masa m și sarcina electrică $q > 0$ este menținută în repaus în punctul O într-o zonă din spațiu, în care există un câmp electric uniform cu intensitatea $\vec{E}$ și un câmp magnetic uniform cu inducția $\vec{B}$. Orientările pentru intensitatea câmpului electric și pentru inducția câmpului magnetic sunt indicate în figura nr. 1.

La momentul de timp $t = 0$, particula P este lăsată liberă. Consideră că particula se deplasează în vid și că mișcarea acesteia este nerelativistă.

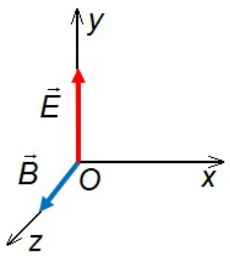

Figura nr.1

1.a.	Dedu expresiile legilor de mișcare pentru particula P, în condițiile menționate.	(2,5 p)
1.b.	Determină ecuația traiectoriei particulei și scrie denumirea acestei traiectorii.	(0,5 p)
1.c.	În Foaia de Răspuns, trasează o schiță a traiectoriei particulei.	(0,5 p)
1.d.	Determină expresia pentru lungimea porțiunii de pe traiectoria particulei P, porțiune delimitată de două puncte consecutive de pe traiectorie, în care viteza particulei este nulă.	(1,0 p)

Studiul mișcării particulei P evidențiază că aceasta avansează într-o anumită direcție, cu o viteză medie numită viteză de drift.

1.e.	Determină expresia vitezei de drift v_{drift} a particulei P.	(0,5 p)

Sarcina de lucru nr. 2

În cadrul sarcinii de lucru nr. 2 vei analiza mișcarea relativistă a unei particule S, caracterizată prin masa de repaus m_0 și sarcina electrică $q > 0$.

La momentul de timp $t = 0$, particula S având impulsul $\vec{p}_{in}$ intră într-o zonă de lărgime ℓ, în care există un câmp electric uniform cu intensitatea $\vec{E}_{câmp}$. Orientările pentru intensitatea câmpului electric și pentru impulsul inițial al particulei, precum și lărgimea zonei în care acționează câmpul electric sunt ilustrate în figura nr. 2.

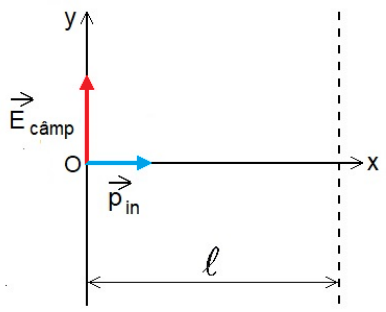

Figura nr.2

Cerințele din cadrul acestei sarcini de lucru se referă la situația în care particula S se deplasează în vid, în zona în care acționează câmpul electric uniform cu intensitatea $\vec{E}_{câmp}$. Viteza undelor electromagnetice în vid este c.

2.a.	Determină expresiile dependențelor de timp $v_x = v_x(t)$ și respectiv $v_y = v_y(t)$ ale componentelor vitezei particulei S.	(2,0 p)
2.b.	Dedu expresiile pentru dependențele de timp $x = x(t)$ și respectiv $y = y(t)$ ale coordonatelor particulei S.	(1,0 p)
2.c.	Determină expresia timpului de zbor t_{zbor} al particulei, prin zona în care acționează câmpul electric uniform.	(0,5 p)
2.d.	Dedu expresia $y = y(x)$ pentru ecuația traiectoriei particulei S.	(0,5 p)

În cele ce urmează, consideră situația în care particula S intră în zona în care acționează câmpul electric uniform cu intensitatea $\vec{E}_{câmp}$ (figura nr. 2) cu un impuls inițial ce corespunde unei viteze $\vec{v}_0$ a particulei. Această viteză este orientată în direcția și sensul axei Ox și are mărimea $v_o << c$.

2.e.	Determină ecuația traiectoriei particulei $y_{clasic} = y_{clasic}(x)$, în această nouă situație. Scrie un scurt comentariu referitor la rezultatul pe care l-ai obținut.	(1,0 p)

Prof. Dr. Delia DAVIDESCU

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 2 (10 puncte)

Traiectorii ale purtătorilor de sarcină electrică în câmpuri electrice si magnetice

1.a.	Expresiile legilor de mișcare ale particulei P $x(t)=$ $y(t)=$ $z(t)=$	2,5p
1.b.	Ecuația traiectoriei particulei P Denumirea traiectoriei	0,5p
1.c.	Schiță a traiectoriei particulei P	0,5p
1.d.	Expresia pentru lungimea porțiunii de pe traiectoria particulei P, porțiune delimitată de două puncte consecutive de pe traiectorie, în care viteza particulei este nulă	1,0p
1.e.	Expresia vitezei de drift a particulei P $v_{drift}=$	0,5p

2.a.	Expresiile dependențelor de timp ale componentelor vitezei particulei S $v_x(t) =$ $v_y(t) =$	2,0p
2.b.	Expresiile dependențelor de timp ale coordonatelor particulei S $x(t) =$ $y(t) =$	1,0p
2.c.	Expresia timpului de zbor al particulei $t_{zbor} =$	0,5p
2.d.	Expresia pentru ecuația traiectoriei particulei S $y(x) =$	0,5p
2.e.	Ecuația traiectoriei particulei în cazul $v_o << c$ $y_{clasic}(x) =$ Scurt comentariu despre rezultatul obținut	1,0p
	Total	10p