



**Problema nr. 1 (10 puncte)**

**Măsurări experimentale**

**Sarcina de lucru nr. 1 – Lățimea unei ferestre (1,2 puncte)**

O fereastră are două ochiuri de geam, unul fix și unul încastrat într-un cadru mobil. Lățimile acestor părți ale ferestrei sunt măsurate cu o riglă, care are o scală gradată în cm, astfel încât distanța cea mai mică dintre două marcaje de pe riglă, adică rezoluția riglei este  $\delta = 1$  cm. Trăsăturile de pe riglă sunt considerate echidistante, iar grosimea lor este neglijabilă față de distanța dintre două trăsături succesive. Rezultatele măsurărilor celor două porțiuni ale ferestrei, notate cu  $x_1$ , respectiv  $x_2$ , sunt următoarele:  $x_1$  se află între diviziunile 71 cm și 72 cm, iar  $x_2$  este cuprins între 75 cm și 76 cm. Din cauza rezoluției finite a riglei, acceptăm o pierdere de informație legată de lungimile măsurate cu aceasta. În urma procesului de măsurare, toate valorile obținute în fiecare din intervalele de mai sus vor fi considerate ca fiind echiprobabile.

<b>1.a.</b>	Scrie rezultatele celor două măsurări, împreună cu incertitudinea de măsurare, sub forma $x \pm u(x)$ .	(0,6 p)
-------------	---	---------

În limbajul teoriei probabilităților, expresia *valori echiprobabile într-un interval* se traduce prin *probabilitatea de a obține orice valoare din acel interval este constantă*, adică distribuția de probabilitate este una dreptunghiulară. Dacă  $f(x)$  este densitatea de probabilitate, atunci, în intervalul  $[x_{min}, x_{max}]$  valoarea acesteia este  $f(x) = const \neq 0$ , în timp ce în afara intervalului  $f(x) = 0$ . Ținând cont de faptul că valoarea reală a lungimii măsurate se află cu siguranță în acest interval, traducerea matematică a acestei certitudini se scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

Pentru a caracteriza lărgimea unei distribuții de probabilitate se folosește atât intervalul  $[x_{min}, x_{max}]$ , dar, mai ales, *varianța*

$$V = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx,$$

unde  $\sigma$  poartă numele de *abaterea standard* a valorii măsurate de la cea medie. În intervalul  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  se află o fracțiune (exprimată în procente) din aria cuprinsă sub graficul distribuției de probabilitate (care se numește *probabilitate de acoperire* sau *nivel de încredere* al intervalului) și ea dă probabilitatea de a găsi valoarea reală a mărimii măsurate în acest interval.

<b>1.b.</b>	Determină abaterea standard a valorilor măsurate ale celor două lungimi, precum și nivelul de încredere asociat.	(0,6 p)
-------------	--	---------

**Sarcina de lucru nr. 2 – Combinație de lungimi (0,4 puncte)**

Pentru o sumă de două variabile aleatorii independente, distribuția de probabilitate se transformă dintr-una dreptunghiulară într-una triunghiulară, pentru ca, pe măsură ce numărul variabilelor crește, această distribuție să capete forma unui clopot, apropiindu-se de distribuția Gauss. În acest caz este valabilă legea de propagare a incertitudinilor independente: Pentru o funcție de mai multe variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , fiecare variabilă  $x_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , fiind măsurată cu o abatere standard  $\sigma_k$ , abaterea standard  $\sigma$  care afectează valoarea calculată a funcției  $f$  este



*eFizică!*  
28 Ianuarie 2024  
Editia a XX-a

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_k^2,$$

unde  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  este derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu  $x_k$  (adică derivata funcției  $f$  în raport cu variabila  $x_k$  când toate celelalte variabile sunt menținute constante).

<b>2.</b>	Determină valoarea sumei celor două lungimi, măsurate independent, precum și incertitudinea de măsurare.	(0,4 p)
-----------	--	---------

**Sarcina de lucru nr. 3 – Pistolul radar (0,5 puncte)**

Pentru o distribuție gaussiană (normală), intervalul  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$  are un nivel de încredere de 68,27 %, intervalul  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$  are un nivel de încredere de 95,45 %, iar intervalul  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$  are un nivel de încredere de 99,73 %. Coeficientul numeric  $k$  (1, 2 sau 3, în exemplele de mai sus) cu care este înmulțit  $\sigma$  se numește *factor de acoperire*.

Pe un sector de drum, viteza maximă de deplasare a autovehiculelor este  $v_{max} = 100$  km/h. Măsurarea vitezei unui autoturism cu ajutorul unui pistol Doppler trebuie făcută cu un grad înalt de încredere pentru a se putea certifica depășirea vitezei maxime admise pe sectorul de drum monitorizat de agenții de circulație. În intervalul de viteze  $[50, 150]$  km/h, incertitudinea relativă a pistolului radar este  $\varepsilon = \frac{\sigma(v)}{v} = 2\%$ . Pentru ca înregistrările consemnând încălcările prevederilor legale să fie valide juridic, agentul de circulație care operează pistolul setează o valoare limită minimă  $v_l$  a vitezei unui autoturism, astfel încât depășirea vitezei  $v_{max} = 100$  km/h să fie certificată cu o probabilitate de cel puțin 99,9 %.

*Obs: Probabilității de acoperire de 99,9 % îi corespunde factorul de acoperire  $k=3,09$ .*

<b>3.</b>	Determină expresia matematică și calculează valoarea numerică pentru viteza limită $v_l$ .	(0,5 p)
-----------	--	---------

**Sarcina de lucru nr. 4 – Casa verde (7,9 puncte)**

Un proiect nou prevede construirea unei mici case pentru a vedea cât de apropiate sunt rezultatele de cele ale unei case cu consum zero de energie. Datele tehnice ale casei sunt date în tabelul de mai jos:

Element	Suprafața/ m <sup>2</sup>	$R_{t,s}/(m^2K/W)$
podea	36	4
pereți	82	4
rame (uși, ferestre)	8	1
acoperiș	54	8

În tabelul de mai sus,  $R_{t,s}$  este rezistența termică specifică (adică pentru unitatea de suprafață), valorile căreia au incertitudinea relativă de 10 %. Valorile suprafețelor sunt exacte (adică incertitudinea la măsurarea lor este de jumătate dintr-o unitate).

<b>4.a.</b>	Determină valoarea rezistenței termice totale a casei și incertitudinea aferentă.	(1,5 p)
-------------	---	---------

Temperatura exterioară este constantă și are valoarea  $T_e = 6$  °C. Se oprește încălzirea și se măsoară temperatura ca funcție de timp, rezultatele fiind consemnate în tabelul de mai jos:

$t/h$	0	1	2	4	5	6	8	9	10
$T/°C$	18	16	14	12	11	10	9	9	8



*eFizică!*  
*28 Ianuarie 2024*  
*Editia a XX-a*

Pentru a explica scăderea temperaturii în timp, se va considera o lege de variație de forma

$$T(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta.$$

Timpul poate fi considerat ca fiind perfect cunoscut, iar temperatura se măsoară cu un termometru cu lichid, cu rezoluția de un grad Celsius. Printr-o transformare adecvată, graficul dependenței  $T(t)$  se poate liniariza, iar reprezentarea optimă a dreptei rezultate (descrisă de ecuația  $y = ax + b$ ) se face utilizând așa-numita *metodă a celor mai mici pătrate*. Această metodă presupune minimizarea sumei pătratelor reziduurilor

$$d_k = y_k - y(x_k),$$

unde  $(x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$  sunt punctele experimentale, adică a sumei

$$S = \sum_k d_k^2 = \sum_k (y_k - ax_k - b)^2,$$

de unde se pot determina expresiile matematice ale parametrilor  $a$  și  $b$ .

<b>4.b.</b>	Demonstrează că dreapta optimă trece prin „centrul de greutate” al norului de puncte experimentale și determină expresiile pantei $a$ și a ordonatei la origine $b$ în funcție de $\bar{x}$ , $\bar{y}$ , $\overline{x^2}$ și $\overline{xy}$ , unde $\bar{x}$ , de exemplu, reprezintă valoarea medie a valorilor experimentale ale variabilei $x$ .	(1,0 p)
-------------	---	---------

Dispersia punctelor experimentale față de dreapta optimă este caracterizată de abaterea experimentală standard a reziduurilor

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_k d_k^2}.$$

Aceasta este considerată drept incertitudinea tuturor valorilor experimentale ale lui  $y_k$ , indiferent de valoarea lui  $k$ .

<b>4.c.</b>	Utilizând legea propagării incertitudinilor, determină expresiile incertitudinilor care afectează valorile pantei și a ordonatei la origine, $s_a$ , respectiv $s_b$ , admitând că toate valorile $x_k$ sunt date (nu sunt afectate de incertitudini).	(1,4 p)
-------------	--	---------

<b>4.d.</b>	Folosind datele experimentale, determină valorile constantelor $\alpha, \beta$ și $\tau$ , împreună cu incertitudinile lor.	(3,0 p)
-------------	---	---------

Inerția termică a casei se datorează capacității calorice  $C$  a materialelor din care e construită.

<b>4.e.</b>	Dedu expresia matematică a capacității calorice a casei și determină valoarea ei numerică, precum și incertitudinea de măsură, $u(C)$ .	(1,0 p)
-------------	---	---------

© Subiect propus de:

**Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU,**

Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași



--
----

*Foaie de Răspunsuri*

*Problema nr. 1 (10 puncte)*

*Măsurări experimentale*

<b>1.a.</b>	$x_1 \pm u(x_1) =$ $x_2 \pm u(x_2) =$	0,6p
<b>1.b.</b>	$\sigma =$ Nivelul de încredere:	0,6p
<b>2.</b>		0,4p
<b>3.</b>	$v_l =$	0,5p
<b>4.a.</b>	$R =$	1,5p
<b>4.b.</b>	$a =$ $b =$	1,0p



*eFizică!*  
28 Ianuarie 2024  
Editia a XX-a

Codul concurentului -- Problema

--
----

<b>4.c.</b>	$s_a =$ $s_b =$	1,4p
<b>4.d.</b>	$\alpha =$ $\beta =$ $\tau =$	3,0p
<b>4.e.</b>	$C =$	1,0p
Total		10p



**Problema nr. 2 (10 puncte)**

**Nava Stelară SS Enterprise**

Această problemă îți propune să îți imaginezi câteva misiuni ale Navei Stelare Enterprise și să analizezi din punct de vedere a teoriei relativității restrânse evenimentele descrise.

În rezolvarea sarcinilor de lucru vei folosi fie o abordare grafică, fie o rezolvare analitică.

**Partea A-Explozia unei supernove**

Unele probleme de teoria relativității restrânse se pot rezolva elegant și rapid, utilizând diagrame spațiu-timp.

Pentru a răspunde cerințelor din partea A, consideră două sisteme de referință inerțiale ( $K$ ) și ( $K'$ ), ale căror origini  $O$  și  $O'$  coincid la momentul  $t_0 = 0$ . Ai în vedere că ceasurile din cele două sisteme au fost sincronizate și că sistemul de referință ( $K'$ ) se deplasează cu viteza constantă, relativistă  $\vec{v}$  față de sistemul ( $K$ ) (figura nr. 1).

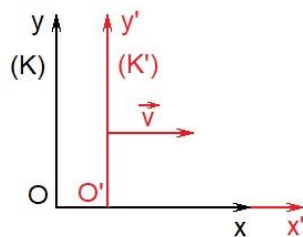


Figura nr. 1

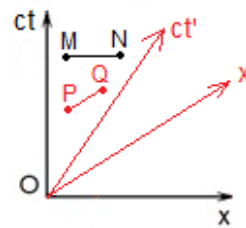


Figura nr. 2

Pentru sistemul de referință inerțial ( $K$ ), diagrama spațiu-timp (figura nr. 2) are axele ortogonale  $Ox$  și respectiv  $O ct$ . Consideră că pe ambele axe este aleasă aceeași unitate de măsură. Sistemului de referință inerțial ( $K'$ ), care se deplasează cu viteza constantă, relativistă  $\vec{v}$  în direcția și sensul axei  $Ox$  îi corespunde o diagramă spațiu-timp cu axele  $Ox'$  și respectiv  $O ct'$ , diagramă ilustrată tot în figura 2. Consideră că axele  $Ox'$  și respectiv  $O ct'$  au aceeași unitate de măsură.

Un eveniment se reprezintă printr-un punct în diagrama spațiu-timp. Figura nr. 2 evidențiază două evenimente  $M$  și  $N$  simultane în sistemul ( $K$ ) și două evenimente  $P$  și  $Q$  simultane în sistemul ( $K'$ ).

În diagrama spațiu-timp, o linie de univers  $x = x(ct)$  a unei particule sau a unui obiect (aproximat în general ca fiind punctiform) este o secvență de evenimente care ilustrează "călătoria" particulei/obiectului prin spațiu-timp.

În cadrul proiectului de cercetare care are ca obiectiv monitorizarea stelei  $\Phi$  și studierea unor proprietăți ale planetei  $\Phi_a$ , care orbitează în jurul acestei stele este folosită nava stelară SS Enterprise, iar o echipă de cercetători se află deja pe planeta  $\Phi_a$ .



*eFizică!*  
*28 Ianuarie 2024*  
*Editia a XX-a*

Utilizează informațiile de mai sus și consideră că steaua  $\Phi$  este în repaus relativ față de sistemul de referință inerțial notat prin  $(K)$ . Pentru simplitatea rezolvării acestei sarcini de lucru presupune și că planeta  $\Phi_a$  este în repaus relativ față de steaua  $\Phi$ . De asemenea, consideră că sistemul de referință  $(K')$  este solidar legat de nava spațială SS Enterprise.

La un moment dat, echipajul navei spațiale SS Enterprise primește un mesaj despre iminenta explozie a stelei  $\Phi$  și transformarea acesteia în supernovă și despre necesitatea preluării pe navă a echipei de cercetători aflați pe planeta  $\Phi_a$ .

**Sarcina de lucru nr. 1**

În diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 din Foia de răspunsuri este trasată linia de univers care descrie evoluția stelei  $\Phi$  și este marcat prin litera  $S_\Phi$  evenimentul exploziei stelei și transformarea acesteia în supernovă.

<b>1.a.</b>	Trasează pe diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 din Foia de răspunsuri linia de univers corespunzătoare planetei $\Phi_a$ . Notează, pe diagramă, această linie de univers cu (1). De asemenea, marchează cu litera $A$ , pe diagramă, evenimentul ajungerii navei spațiale SS Enterprise la planeta $\Phi_a$ .	(0,5 p)
<b>1.b.</b>	Pe diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 din Foia de răspunsuri, trasează linia de univers corespunzătoare luminii emise de supernovă în direcția și sensul axei $Ox$ și notează această linie de univers cu (2). De asemenea, trasează și linia de univers corespunzătoare luminii emise de supernovă în direcția axei $Ox$ , dar în sens opus acesteia. Notează, pe diagramă, această linie de univers cu (3).	(0,5 p)
<b>1.c.</b>	Precizează dacă în raport cu sistemul $(K')$ , solidar legat de nava spațială SS Enterprise, această navă ajunge la planeta $\Phi_a$ înainte sau după ce steaua $\Phi$ explodează. Argumentează răspunsul, folosind diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 din Foia de răspunsuri.	(1,5 p)

Consideră că echipa de cercetători aflată pe planeta  $\Phi_a$  este preluată de nava spațială SS Enterprise, fără ca nava să își modifice vectorul vitează de deplasare.

<b>1.d.</b>	Precizează dacă echipa de cercetători vede explozia supernovei, atunci când aceștia încă se află pe planetă sau după ce au fost preluați de nava SS Enterprise. Argumentează răspunsul, folosind diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 din Foia de răspunsuri.	(1,5 p)
-------------	--	---------



**Partea B-Imagini ale liniei de balize a navei spațiale SS Enterprise**

Nava Stelară Enterprise are de-a lungul fiecăruia dintre cele două propulsoare warp câte o succesiune de cinci balize luminoase, coliniare, echidistante. Pentru propulsorul din dreapta, situația descrisă este ilustrată în figura nr. 4. În rezolvarea părții B a acestei probleme poți considera că balizele de pe un propulsor se află tot timpul de-a lungul axei de coordonate  $Ox$ . De asemenea, poți considera balizele ca fiind punctiforme.

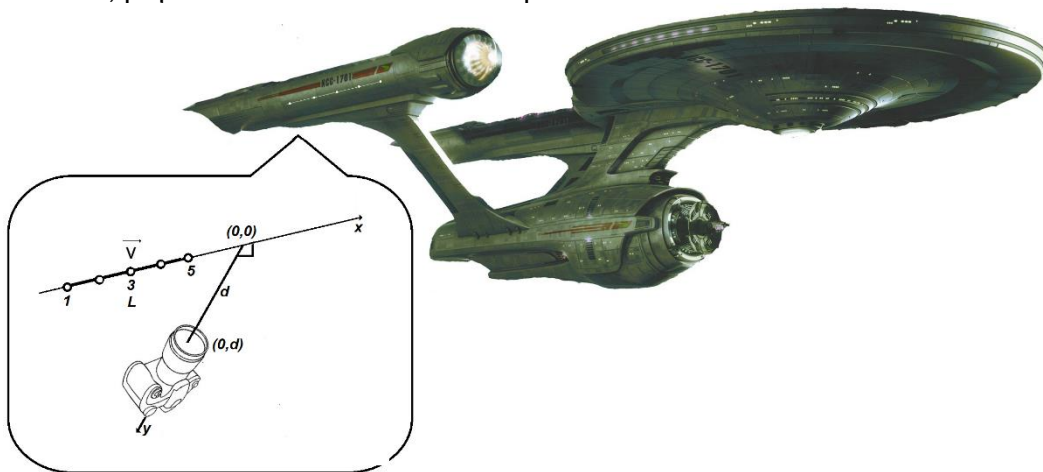


Figura nr. 4

O altă navă spațială are rolul de a monitoriza SS Enterprise, în vederea studierii posibilităților de a crește performanțele călătoriilor spațiale. Consideră că nava spațială este în repaus relativ față de un reper stelar. În camera de comandă a navei spațiale, sunt analizate imagini ale liniei de balize luminoase. Imaginile sunt luate de o cameră de luat vederi, cu diafragma situată în punctul de coordonate  $(0,d)$ , în sistemului de coordonate ortogonale  $xOy$ , ilustrat în detaliul din figura nr. 4. Ai în vedere că o imagine a liniei de balize luminoase este produsă de razele care ajung simultan la diafragma camerei, care se deschide pentru un interval de timp extrem de scurt și că lungimea proprie a liniei de balize este  $L$ .

În cele ce urmează, consideră că SS Enterprise se deplasează pe direcția și în sensul axei  $Ox$ , cu viteza constantă  $\vec{v}$  în raport cu cealaltă navă spațială, iar camera de luat vederi rămâne imobilă în punctul de coordonate  $(0,d)$ . Mărimea vitezei luminii în vid este  $c$ . Pentru a exprima răspunsurile într-o formă mai simplă, poți utiliza mărimile  $\beta = v/c$  și  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

**Sarcina de lucru nr. 2**

Poziția reală a unei balize luminoase este poziția acesteia în sistemul de referință în care camera de luat vederi este în repaus.

Pe o imagine furnizată de camera de luat vederi, se observă că imaginea uneia dintre balizele luminoase este situată în poziția  $x_i$ .

<b>2.a.</b>	Determină expresia poziției reale $x$ a balizei luminoase, în momentul în care imaginea sa se formează în camera de luat vederi. Exprimă rezultatul în funcție de $x_i$ și de alte mărimi specificate în enunțul problemei.	(1,0 p)
-------------	---	---------





*eFizică!*  
*28 Ianuarie 2024*  
*Editia a XX-a*

<b>2.b.</b>	Dedu relația care exprimă poziția $x_i$ a imaginii balizei luminoase, imagine furnizată de camera de luat vederi. Exprimă rezultatul în funcție de $x$ și de alte mărimi specificate în enunțul problemei.	(1,0 p)
-------------	--	---------

*Sarcina de lucru nr. 3*

Una dintre imaginile liniei de balize este înregistrată pe camera de luat vederi, în momentul în care centrul liniei de balize se află în punctul  $x_0$ .

<b>3.a.</b>	Determină expresia pentru lungimea aparentă $L_i$ a liniei de balize din această imagine. Exprimă rezultatul în funcție de $x_0$ și de alte mărimi specificate în enunțul problemei.	(1,0 p)
<b>3.b.</b>	Analizează modul cum variază lungimea aparentă a liniei de balize $L_i = L_i(x_0)$ , pe măsură ce SS Enterprise se deplasează de-a lungul axei $Ox$ , venind de foarte departe, trecând prin originea sistemului și apoi îndepărtându-se.	(1,0 p)

*Sarcina de lucru nr. 4*

O altă imagine furnizată de camera de luat vederi evidențiază faptul că imaginile balizelor din capete sunt situate la o aceeași distanță față de centrul diafragmei camerei de luat vederi.

<b>4.a.</b>	Dedu expresia pentru lungimea aparentă $L_{i,simetric}$ a liniei de balize din această nouă imagine.	(1,0 p)
<b>4.b.</b>	Determină expresia pentru poziția actuală $x_0^*$ a balizei din mijloc, în momentul în care s-a obținut această imagine.	(1,0 p)

© Subiect propus de:  
Prof. Dr. Delia DAVIDESCU

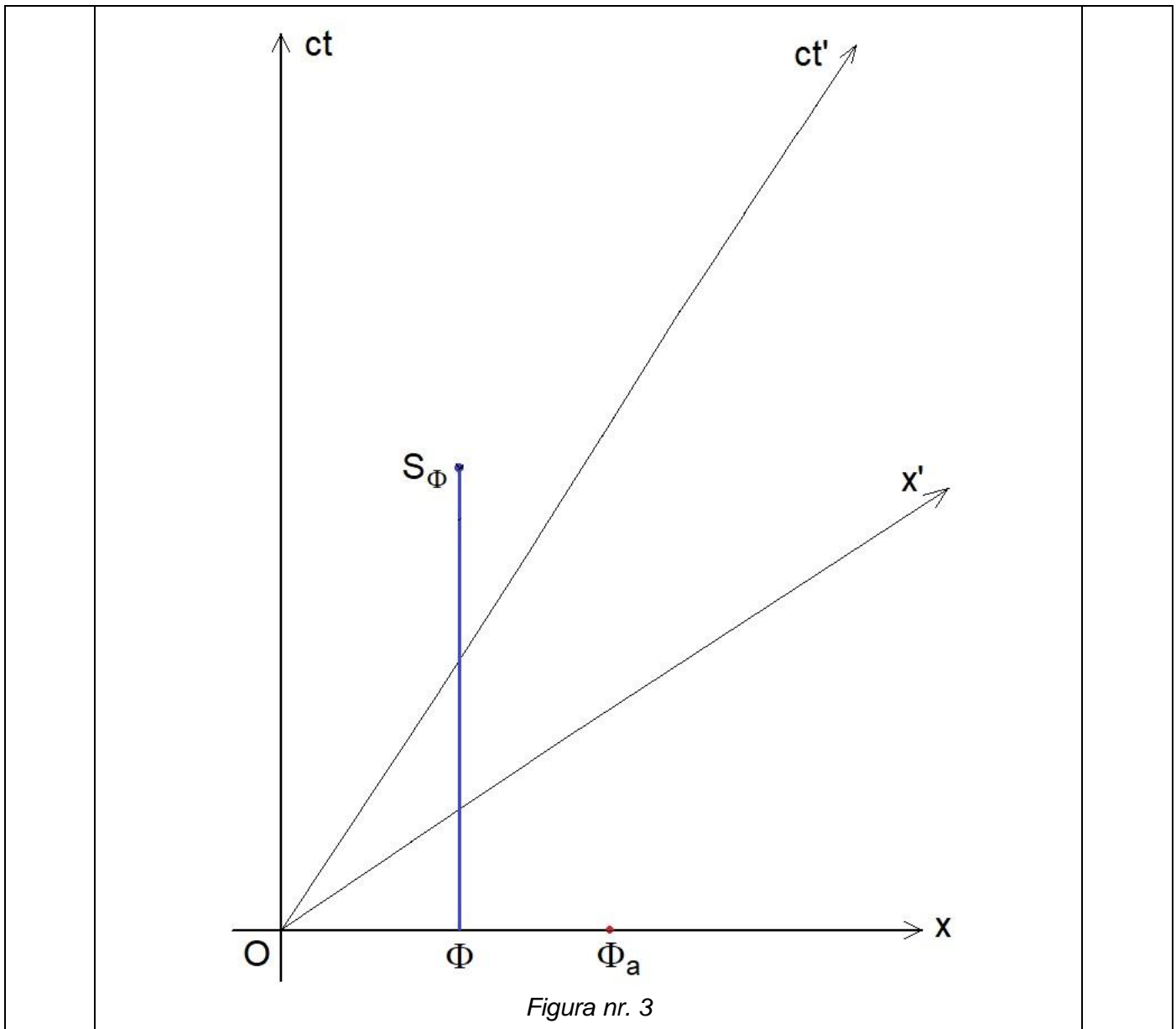


--
----

**Foaie de Răspunsuri**

Problema nr. 2 (10 puncte)

Nava Stelară SS Enterprise (10 puncte)



<b>1.a.</b>	Trasarea pe diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 a liniei de univers corespunzătoare planetei $\Phi_a$ și notarea, pe diagramă, a acestei linii de univers cu (1). Marcarea cu litera A, pe diagramă, evenimentul ajungerii navei spațiale SS Enterprise la planeta $\Phi_a$ .	0,5p
-------------	---	------



--
----

<b>1.b.</b>	Trasarea pe diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 a liniei de univers corespunzătoare luminii emise de supernovă în direcția și sensul axei $Ox$ și notarea acestei linii de univers cu (2). Trasarea pe diagrama spațiu-timp din figura nr. 3 a liniei de univers corespunzătoare luminii emise de supernovă în direcția axei $Ox$ , dar în sens opus acestei axe și notarea acestei linii de univers cu (3).	0,5p
<b>1.c.</b>	Precizarea dacă în raport cu sistemul $(K')$ , solidar legat de nava spațială SS Enterprise, această navă ajunge la planeta $\Phi_a$ înainte sau după ce steaua $\Phi$ explodează.  Argumentarea răspunsului, folosind diagrama spațiu-timp din figura nr. 3.	1,5p
<b>1.d.</b>	Precizarea referitoare la faptul că echipa de cercetători vede explozia supernovei, atunci când ei încă se află pe planetă sau după ce au fost preluați de nava SS Enterprise.  Argumentarea răspunsului, folosind diagrama spațiu-timp din figura nr. 3.	1,5p



--
----

<b>2.a.</b>	Expresia poziției reale $x$ a balizei luminoase $x =$	1,0p
<b>2.b.</b>	Expresia poziției $x_i$ a imaginii balizei luminoase $x_i =$	1,0p
<b>3.a.</b>	Expresia pentru lungimea aparentă $L_i$ a liniei de balize din imagine specificată $L_i =$	1,0p
<b>3.b.</b>	Analiza modul cum variază lungimea aparentă a liniei de balize $L_i = L_i(x_0)$ se va face pe foile care conțin rezolvarea problemei.	1,0p
<b>4.a.</b>	Expresia pentru lungimea aparentă $L_{i,simetric}$ a liniei de balize din noua imagine $L_{i,simetric} =$	1,0p
<b>4.b.</b>	Expresia pentru poziția actuală $x_0^*$ a balizei din mijloc, în momentul în care s-a obținut acea imagine $x_0^* =$	1,0p
Total		10p