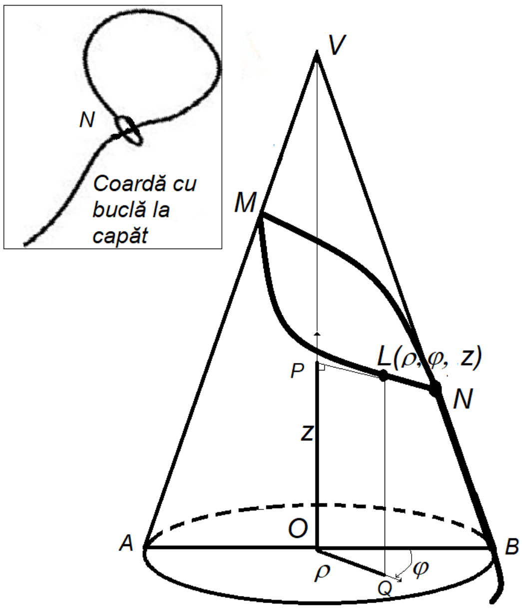
Problema I (10 puncte)

Alpinistul utilitar

Un alpinist utilitar este angajat pentru a vopsi acoperișul conic al unui turn foarte înalt. Ajută-l să-și proiecteze o unealtă potrivită pentru ascensiune – un laț cu care să se poată agăța de acoperiș.

În acest scop, vei face un studiu, în care să analizezi din punct de vedere teoretic dacă alpinistul ar putea folosi în siguranță o coardă cu o buclă la un capăt, pentru a vopsi acel acoperiș.



În studiul pe care îl vei face, folosește următoarele ipoteze:

- Coarda folosită de alpinist este perfect deformabilă și inextensibilă și are un laț cu buclă alunecătoare.

- Înălțimea alpinistului este mică față de înălțimea acoperișului și față de lungimea corzii, astfel încât bucla acelei corzi se întinde și se mulează de-a lungul feței acoperișului conic. Porțiunea liniară a corzii urmează generatoarea NB a conului pe partea sa descendentă, așa cum este evidențiat în figură.

- Frecarea dintre acoperiș și coarda perfect deformabilă și inextensibilă este neglijabilă.

- Acoperișul are forma unui con circular drept cu înălțimea verticală h; raza bazei dispusă într-un plan orizontal este r. În figură, V este vârful conului, O este centrul bazei, iar AB este un diametru al acesteia.

În studiul pe care îl faci, folosește sistemul de coordonate cilindrice (ρ,φ,z) reprezentat în figură. Pentru punctul L, coordonata ρ este segmentul OQ - lungimea proiecției ortogonale pe planul bazei conului a vectorului $\overrightarrow{OL}$, coordonata z este segmentul OP - lungimea proiecției vectorului $\overrightarrow{OL}$ pe axa verticală de simetrie a conului, iar coordonata φ este mărimea unghiului făcut de proiecția orizontală a vectorului $\overrightarrow{OL}$ cu direcția $\overrightarrow{OB}$. În cadrul acestui studiu trebuie să rezolvi câteva sarcini de lucru.

Sarcina de lucru nr. 1

La un moment dat coarda întinsă, agățată de acoperiș este astfel dispusă încât coordonatele nodului buclei sale (ρ,φ) au valorile $(a,0)$. Pentru această situație:

1.a.	Determină expresia coordonatei z_N a nodului buclei și expresia lungimii ℓ a porțiunii de coardă care formează bucla.	(2,0p)

1.b.	În sistemul de coordonate cilindrice dat, determină coordonatele ρ_L și z_L ale punctului L de pe bucla lațului, dacă se știe că lungimea bucății de coardă NL este $\lambda \in (0, \ell/2)$. Exprimă rezultatele în funcție de a, h, r, λ.	(2,0p)

1.c.	Determină coordonatele (ρ_M, φ_M, z_M) punctului M, aflat la jumătatea buclei lațului și exprimă rezultatul în funcție de a, h, r.	(1,0p)

1.d.	Răspunde cu Da sau Nu la întrebarea: Bucla lațului agățată de acoperiș este conținută într-un plan?	(0,5p)

Sarcina de lucru nr. 2

2.a.	Pentru acoperișurile pe care alpinistul ar putea lucra folosind lațul construit, determină domeniul de valori al raportului h/r.	(1,0p)

2.b.	Dacă alpinistul ar bloca alunecarea nodului, astfel încât bucla lațului să aibă mereu lungimea ℓ, determină domeniul de valori al raportului h/r, pentru acoperișurile pe care alpinistul ar putea lucra folosind lațul astfel construit.	(1,0p)

Sarcina de lucru nr. 3

De jur împrejurul turnului cilindric, imediat sub acoperișul conic, sunt încastrate în ziduri bare identice, elastice, orizontale, cu masa neglijabilă. Unele dintre bare au în capătul liber bile cu dimensiuni neglijabile și cu masa m_1. Bila de la capătul unei bare poate suferi mici oscilații cu frecvența f_1.

Pentru a-și purta vasul cu vopsea având masa m_2, alpinistul îl leagă cu o coardă elastică asimilabilă unui resort ideal. Astfel legat, vasul poate efectua mici oscilații cu frecvența f_2.

La un moment dat, alpinistul atârnă – folosind coarda elastică - vasul cu vopsea de capătul unei bare care nu are bilă.

3.a.	Determină expresia constantei de elasticitate k_1 a unui resort care are un capăt fix și la celălalt capăt are atârnată masa m_1, care efectuează mici oscilații cu frecvența f_1.	(1,0p)

3.b.	Dedu expresia frecvenței f a micilor oscilații ale vasului de masă m_2, atârnat de bară prin intermediul coardei elastice. Exprimă răspunsul în funcție de m_1, m_2, f_1, f_2.	(1,5p)

Dacă vei considera necesar, folosește pentru rezolvare reprezentarea într-un plan a desfășuratei suprafeței laterale a conului reprezentând acoperișul, în situația în care „tăierea” acestei suprafețe se face după o generatoare.

© Subiect propus de:

Adrian DAFINEI, PhD

Foaie de Răspunsuri

Problema I
Alpinistul utilitar

1.a.	$z_N =$ $\ell =$	2,0p
1.b.	$\rho_L =$ $z_L =$	2,0p
1.c.	$\rho_M =$ $\varphi_M =$ $z_M =$	1,0p
1.d.		0,5p
2.a.	$\frac{h}{r} =$	1,0p
2.b.	$(h/r) \in$	1,0p
3.a.	$k_1 =$	1,0p
3.b.	$f =$	1,5p
	Total	10p

Problema a II – a (10 puncte)

Proprietăți ale materialelor paramagnetice

Această problemă îți propune să studiezi câteva dintre proprietăţile materialelor paramagnetice. În studiul pe care îl vei face consideră cunoscute sarcina e a electronului şi masa m^* a acestuia, constanta lui Planck h, magnetonul Bohr-Procopiu $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m^*}$, constanta Boltzmann k_B precum și alte mărimi care vor fi specificate în cadrul diferitelor sarcini de lucru.

Sarcina de lucru nr. 1

Modulul momentului magnetic de dipol $\vec{\mu}$ al unei spire circulare cu raza r, străbătută de un curent cu intensitatea i are expresia $|\vec{\mu}| = \pi \cdot r^2 \cdot i$. Momentul magnetic de dipol are direcţia perpendiculară pe planul spirei şi sensul dat de regula burghiului drept.

1.a.	În modelul planetar al atomului, determină expresia ce evidenţiază legătura dintre momentul cinetic orbital $\vec{L}$ al electronului aflat în mişcare circulară în jurul nucleului şi momentul său magnetic orbital $\vec{\mu}_\ell$. Momentul magnetic orbital al electronului este un vector coliniar cu momentul cinetic orbital şi antiparalel cu acesta, datorită sarcinii negative a electronului.	(1,0p)

Sarcina de lucru nr. 2

În modelul cuantic al atomului, momentul cinetic orbital al electronului din starea caracterizată prin numărul cuantic principal n nu poate lua decât valorile

$$|\vec{L}| = \hbar \cdot \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \text{ cu } \ell = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \qquad (1)$$

unde ℓ este numărul cuantic orbital.

Valorile posibile L_z ale proiecţiei momentului cinetic orbital pe o direcţie din spaţiu Oz sunt cuantificate conform expresiei

$$L_z = m_\ell \cdot \hbar \qquad (2)$$

În expresia din relația (2) m_ℓ reprezintă numărul cuantic magnetic orbital și ia valorile $-\ell, -\ell+1, \ldots \le m_\ell \le ..\ell-1, \ell$.

2.a.	Utilizând modelul cuantic, pentru un atom aflat într-un câmp magnetic având inducția orientată în direcția și sensul axei Oz, determină expresia pentru valorile posibile θ ale unghiului dintre direcţia momentului cinetic orbital al electronului aflat în starea cu numărul cuantic orbital ℓ şi direcţia inducției câmpului magnetic. Exprimă rezultatul în funcție de numerele cuantice ℓ și m_ℓ.	(0,4p)

Sarcina de lucru nr. 3

Distribuţia Boltzmann este o funcţie de partiţie care descrie probabilitatea de realizare a uneia dintre stările unui sistem care se poate afla în mai multe stări.
Pentru un sistem aflat la echilibru termodinamic și compus din N particule distribuite pe i stări, numărul N_k al particulelor aflate în starea k, pentru care energia este E_k are expresia

$$\frac{N_k}{N}=\frac{\exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)}{Z(T)} \qquad (3)$$

În expresia descrisă prin relația (3)

$$Z(T)=\sum_{k=1}^{i}\exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \qquad (4)$$

unde k_B este constanta Boltzmann, iar T este temperatura absolută a sistemului. Distribuţia Boltzmann se aplică sistemelor cu densitate mică de particule, aflate la temperatură înaltă, pentru care efectele cuantice pot fi neglijate.

3.a.	Determină expresia energiei medii $\langle E\rangle$ a unui sistem de particule care se pot afla într-una dintre cele trei stări, având respectiv energiile $E_k = k\cdot\delta_1\cdot k_B\cdot T$, unde $k=1, 2, 3$. Consideră că sistemul de particule aflat în echilibru termic la temperatura T se supune distribuției Boltzmann şi că $\delta_1>0$ are o valoare cunoscută. Exprimă rezultatul în funcție de δ_1, k_B și T.	(1,0p)

Sarcina de lucru nr. 4

Paramagnetismul este o formă de magnetism, pe care o prezintă anumite materiale atunci când sunt plasate într-un câmp magnetic exterior. Momentul magnetic indus prin aplicarea câmpului exterior depinde liniar de inducția câmpului magnetic aplicat şi este - de regulă – mic. Permeabilitatea magnetică a materialelor paramagnetice este supraunitară.

Consideră un ansamblu de N atomi identici, care nu interacţionează între ei. Pe lângă momentul cinetic orbital, electronii au şi moment cinetic de spin. Interacţiunea spin-orbită conduce la necesitatea caracterizării electronului prin momentul cinetic total $\vec{J}$. Mărimea momentului cinetic total este cuantificată conform relației

$$\left|\vec{J}\right|=\hbar\cdot\sqrt{j\cdot(j+1)} \qquad (5)$$

unde j reprezintă numărul cuantic total.

Valorile posibile J_z ale proiecţiei momentului cinetic total pe o direcţie Oz din spaţiu sunt de asemenea cuantificate

$$J_z=m_j\cdot\hbar, \qquad (6)$$

În expresia din relația (6) m_j reprezintă numărul cuantic magnetic total și ia valorile $-j,-j+1,\ldots\le m_j\le ..j-1,j$

Consideră că sistemul de atomi analizat se află la echilibru termodinamic, caracterizat de temperatura T şi că este plasat într-un câmp magnetic uniform care are inducția $\vec{B}$. Consideră că axa Oz este orientată pe direcţia și în sensul inducției magnetice $\vec{B}$.

Energia E_m ataşată unui moment magnetic de dipol plasat într-un câmp magnetic cu inducția $\vec{B}$ are expresia

$$E_m=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad (7)$$

Momentul magnetic de dipol $\vec{\mu}_j$ asociat fiecărui atom este proporţional cu momentul cinetic total şi are expresia

$$\vec{\mu}_j = -\frac{e}{2m^*} \cdot g \cdot \vec{J} \qquad (8)$$

unde factorul giromagnetic g este o constantă caracteristică speciei atomice, aflată într-o anumită stare.

Magnetizarea M a unui sistem este definită ca suma mediilor proiecţiilor momentelor magnetice ale particulelor din sistem pe direcţia Oz specificată mai sus.

În rezolvarea cerinţelor din cadrul sarcinii de lucru 4, presupune că sistemul este suficient de rarefiat pentru ca inducția câmpului magnetic la nivelul fiecărui atom să fie egală cu inducția $\vec{B}$ a câmpului magnetic aplicat.

4.a.	Pentru un atom din sistemul considerat, scrie expresia valorilor posibile ale mărimii $\mu_{j,z}$, reprezentând mărimea proiecţiei momentului magnetic de dipol $\vec{\mu}_j$ pe direcţia câmpului magnetic aplicat. Exprimă rezultatul în funcție de magnetonul Bohr-Procopiu μ_B, de factorul giromagnetic g și de numărul cuantic magnetic total m_j.	(0,3p)

4.b.	Scrie expresia pentru energiile ataşate momentului magnetic de dipol al atomului aflat în câmpul magnetic cu inducția $\vec{B}$, pentru fiecare dintre stările posibile. Exprimă rezultatul în funcție de μ_B, g, m_j și de mărimea inducției B a câmpului magnetic.	(0,3p)

4.c.	Dedu expresia mediei $\langle \mu_{j,z} \rangle$ a proiecţiei pe direcţia câmpului magnetic a momentului magnetic $\vec{\mu}_j$ pentru sistemul considerat. Exprimă rezultatul în funcție de μ_B, g, B, k_B, T și de numărul cuantic total j. Particularizează expresia obținută pentru $\langle \mu_{j,z} \rangle$ pentru situațiile în care $j = \frac{1}{2}$ şi respectiv $j = 1$.	(3,0p)

4.d.	Determină expresia pentru magnetizarea sistemului de atomi. Exprimă rezultatul în funcție de numărul de atomi N, *de* μ_B, g, B, k_B, T și de numărul cuantic total j.	(0,7p)

4.e.	Dedu expresia pentru magnetizarea sistemului în situaţia în care inducția câmpului magnetic este foarte mică. Exprimă rezultatul în funcție de N, μ_B, g, B, k_B, T și de numărul cuantic total j.	(0,8p)

Căldura specifică per particulă η se defineşte ca raportul dintre variaţia energiei medii per particulă şi variaţia temperaturii sistemului căruia îi aparţine particula.

4.f.	Demonstrează că pentru un sistem caracterizat printr-un spectru cu un număr n finit de energii E_n şi pentru oricare n, căldura specifică per particulă are expresia $\eta = \sigma^2 / (k_B \cdot T^2)$. Cunoşti că varianţa spectrală are expresia $\sigma^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$.	(1,5p)

4.g.	Dedu expresia căldurii specifice per particulă pentru un material paramagnetic, pentru care numărul cuantic total ia valori naturale, în situația în care pentru fiecare valoare a energiei E_n din spectrul cu un număr finit de energii este îndeplinită condiția $E_n << k_B \cdot T$. Exprimă rezultatul în funcție de μ_B, g, B, k_B, T și de numărul cuantic total j.	(1,0p)

Dacă îţi sunt utile, poţi folosi relaţiile:

$$q + q^2 + \ldots + q^n = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (9)$$

$$1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + \ldots + n \cdot q^n = q \cdot \frac{1-(n+1)\cdot q^n + n \cdot q^{n+1}}{(1-q)^2} \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad (11)$$

$$ctgh(x) \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \ \ pentru\ |x| << 1 \qquad (12)$$

Delia DAVIDESCU, PhD

Foaie de Răspunsuri

Problema a II – a
Proprietăți ale materialelor paramagnetice

1.a.	$\vec{\mu}_\ell =$	1,0p
2.a.	$\theta =$	0,4p
3.a.	$\langle E \rangle =$	1,0p
4.a.	$\mu_{j,z} =$	0,3p
4.b.	$E_m =$	0,3p
4.c.	$\langle \mu_{j,z} \rangle =$ $\langle \mu_{j,z} \rangle\big\vert_{j=1/2} =$ $\langle \mu_{j,z} \rangle\big\vert_{j=1} =$	3,0p
4.d.	$M =$	0,7p
4.e.	$M' =$	0,8p
4.f.	Pentru demonstrație corectă	1,5p
4.g.	$\eta =$	1,0p
	Total	10p