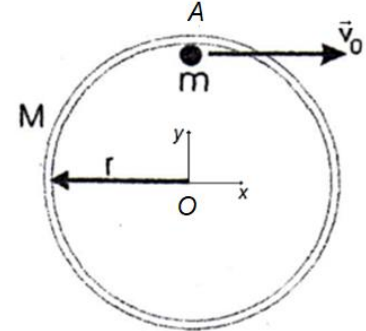




Problema I (10 puncte)

Partea A - Inel cu puc

Un inel circular rigid, nedeformabil, de grosime neglijabilă, având masa M distribuită uniform și raza r este plasat astfel încât circumferința sa se află pe o masă orizontală. Pe masă, tangent la interiorul inelului, este plasat în punctul A un puc cu masa m (un disc mic, dur, - ce poate fi considerat punct material). Inelul și pucul pot aluneca pe masa orizontală fără frecare. La un moment dat (considerat momentul inițial), pucului i se imprimă viteza \vec{v}_0 pe direcția perpendiculară pe raza OA - ca în figură.



În rezolvarea sarcinilor de lucru din această parte a problemei, folosește sistemul de referință prezentat în figură, pentru care originea se află în poziția inițială a centrului de masă B al inelului (coincident cu O), iar axa Ox este paralelă cu \vec{v}_0 . Exprimă răspunsurile ca funcții de \vec{v}_0 , M , m , r și de timpul t .

Atunci când rezolvi sarcina de lucru nr. 1 și sarcina de lucru nr. 2, ai în vedere că masele M și m sunt diferite, dar comparabile ca mărime.

Atunci când rezolvi sarcina de lucru nr. 3, ai în vedere că masele M și m au mărimi foarte diferite.

Sarcina de lucru nr. 1

1.a.	Dedu expresiile care indică dependența de timp a coordonatelor $(x_A(t), y_A(t))$ ale pucului.	(1,0p)
1.b.	Determină expresiile care dau dependența de timp a coordonatelor $(x_B(t), y_B(t))$ ale centrului de masă al inelului.	(1,0p)
1.c.	Schițează traiectoriile pucului și centrului de masă al inelului.	(1,0p)

Sarcina de lucru nr. 2

2.a.	Dedu expresiile evoluțiilor în timp ale componentelor $v_{A,x}(t)$ și $v_{A,y}(t)$ ale vitezei pucului, precum și expresiile evoluțiilor în timp ale componentelor $v_{B,x}(t)$ și $v_{B,y}(t)$ ale vitezei centrului de masă al inelului.	(1,0p)
2.b.	Determină pozițiile punctelor, în care centrul de masă al inelului are din nou viteză nulă. Determină momentele de timp la care viteza centrului de masă al inelului va fi din nou nulă.	(1,0p)

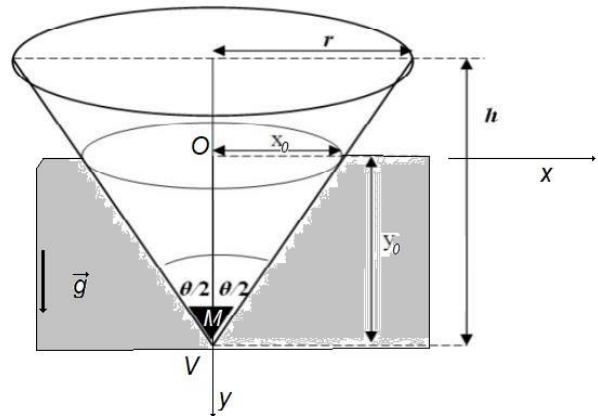
Sarcina de lucru nr. 3

3.a.	Pentru cazul în care $M \gg m$, scrie relațiile care dau dependențele de timp ale coordonatelor $(x_A(t), y_A(t))$ ale pucului și schițează traiectoria sa.	(1,0p)
3.b.	Pentru cazul în care $m \gg M$, determină expresiile evoluțiilor în timp ale vitezelor pucului și centrului de masă al inelului.	(1,0p)

Partea B – Plută de undiță

O plută de undiță are forma unui con circular drept cu înălțimea h și cu raza bazei r . Întreaga masă M a plutei este concentrată în vârful V al conului. Cufundată în apă (a cărei densitate este ρ), pluta se află în echilibru când distanța de la nivelul apei la vârful conului este y_0 (vezi figura alăturată).

Pluta poate oscila pe verticală (având mereu axa conului orientată pe verticală). Se poate neglija rezistența vâscoasă suferită de pluta în mișcare din partea apei. Accelerația gravitațională este \vec{g} .



Sarcina de lucru nr. 1

În cadrul sarcinii de lucru nr. 1, din partea B a problemei, consideră că pluta este cufundată în apa unui lac.

1.a.	Dedu ecuația de oscilație pe verticală a vârfului plutei.	(1,0p)
1.b.	Folosind o aproximație acceptabilă, transformă ecuația de oscilație determinată în cadrul sarcinii de lucru 1.a. într-o ecuație de oscilație armonică simplă.	(1,0p)
1.c.	Dedu expresia frecvenței micilor oscilații ale plutei. Exprimă rezultatul în funcție de M, h, r, g, ρ .	(1,0p)

© Subiect propus de:

Adrian DAFINEI, PhD



--

Foaie de Răspunsuri**Problema I (10 puncte)**

Partea A - Inel cu puc		
1.a.	$x_A(t) =$ $y_A(t) =$	1,0p
1.b.	$x_B(t) =$ $y_B(t) =$	1,0p
1.c.	Notă: Schița cu traiectoriile pucului și centrului de masă al inelului va fi inclusă în soluția problemei.	1,0p
2.a.	$v_{A,x}(t) =$ $v_{A,y}(t) =$ $v_{B,x}(t) =$ $v_{B,y}(t) =$	1,0p
2.b.	Pozițiile punctelor, în care centrul de masă al inelului are din nou viteză nulă Momentele de timp la care viteza centrului de masă al inelului va fi din nou nulă	1,0p



--

3.a.	Pentru $M \gg \gg m$ $x_A(t) =$ $y_A(t) =$ <i>Notă: Schița cu traiectoria pucului va fi inclusă în soluția problemei</i>	1,0p
3.b.	Pentru $m \gg \gg M$ $v_{A,x}(t) =$ $v_{A,y}(t) =$ $v_{B,x}(t) =$ $v_{B,y}(t) =$	1,0p
Partea B – Plută de undiță		
1.a.	Ecuția de oscilație pe verticală a vârfului plutei	1,0p
1.b.	Ecuția de oscilație armonică simplă	1,0p
1.c.	Expresia frecvenței micilor oscilații ale plutei	1,0p
Total		10p



Problema a II-a (10 puncte)

Pompă

Introducere

Într-o zi de toamnă, când presiunea atmosferică este $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ și temperatura este $T_0 = 300\text{K}$, inginerul Ion Popescu constată că automobilul pe care îl conduce are tendința de a intra pe banda opusă. El consideră că acest lucru se petrece pentru că roata din față stânga este dezumflată și se decide să corijeze situația, deși afară plouă. Domnul Popescu măsoară presiunea aerului din roata din față stânga și constată că valoarea acesteia este de numai $2 \cdot p_0$, deși presiunea aerului din roată ar fi trebuit să fie $4 \cdot p_0$. Camera roții al cărei volum este $V_r = 50,0 \text{ dm}^3$ - indiferent de presiunea interioară- are un ventil (o supapă) care se deschide numai dacă presiunea exterioară egalează presiunea din interiorul camerei. Domnul inginer Popescu constată că ventilul este defect, dezumflă roata și înlocuiește ventilul cu unul bun. Apoi se decide să umfle roata (care în acel moment conține aer la presiunea p_0), folosind pompa manuală. Volumul V_p al pompei manuale (adică volumul pe care îl are la dispoziție aerul din cilindrul pompei la începutul fiecărei curse) este $V_p = V_r / N$, unde $N = 20$. Lungimea cursei pistonului pompei este $\ell = 1,00 \text{ m}$. Se poate presupune că pereții pompei și cei ai camerei roții sunt perfect diatermali, astfel încât temperatura lor, precum și cea a aerului din cilindrul pompei și din camera roții automobilului rămâne întotdeauna egală cu temperatura exterioară. Constanta universală a gazelor ideale este $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Notă: Ai în vedere ca, în această problemă, să exprimi toate rezultatele numerice pe care le obții, folosind numere cu trei cifre semnificative.

Sarcina de lucru nr. 1

Sarcina de lucru 1 îți propune să studiezi câțiva dintre parametrii de stare ai sistemului pompă – camera roții automobilului și să exprimi, după caz, rezultatele pe care le obții în funcție de p_0 , V_r , T_0 , R , de numărul N și de numărul de pompări k , precum și de distanța ℓ și de deplasarea x pistonului, față de capătul de sus al pompei.

1.a.	Determină expresia numărului ν_k de moli de aer din camera roții automobilului, după ce domnul inginer Popescu a efectuat k pompări. Calculează valoarea numărului de moli ν_{40} .	(1,5p)
1.b.	Dedu expresia presiunii p_k a aerului din camera roții automobilului, după ce domnul inginer Popescu a efectuat k pompări. Calculează valoarea presiunii p_{40} .	(0,5p)
1.c.	În cursul celei de-a $(k + 1)$ pompări a aerului în camera roții automobilului, ventilul se deschide când pistonul se află la o anumită distanță x_{k+1} față de poziția sa cea mai de sus. Determină expresia distanței x_{k+1} și valoarea distanței x_{41} .	(1,5p)

1.d.	Dedu expresia $p = p(x)$ a legii de variație a presiunii aerului din cilindrul pompei, în cursul celei de a $(k + 1)$ pompări, în funcție de distanța x a pistonului, față de poziția sa cea mai de sus. Schițează graficul acestei dependențe.	(2,0p)
-------------	---	--------

Sarcina de lucru nr. 2

În cadrul sarcinii de lucru 2 ți se cere să deduci expresia lucrului mecanic efectuat de domnul inginer Popescu, pentru a umfla camera roții automobilului, până la presiunea $n \cdot p_0$, unde $n = 4$. Exprimă, după caz, rezultatele obținute în funcție de numerele N , k și n , de presiunea p_0 și de volumul V_r .

2.a.	Pe parcursul umflării camerei roții automobilului, în cursa pistonului notată cu numărul k_0 , presiunea aerului din cameră atinge valoarea $n \cdot p_0$. Determină expresia numărului k_0 și calculează-i valoarea.	(1,0p)
-------------	--	--------

2.b.	Determină expresia lucrului mecanic L_{total} efectuat de domnul inginer Popescu, din momentul începerii pompării, până când presiunea aerului din camera roții automobilului atinge valoarea $n \cdot p_0$. Calculează valoarea lucrului mecanic $L_{10, total}$ efectuat în cursul celei de a 10 pompări. Consideră că frecările dintre piston și cilindru sunt neglijabile.	(2,0p)
-------------	---	--------

Sarcina de lucru nr. 3

Sarcina de lucru 3 îți propune să analizezi modificarea presiunii din camera roții automobilului, la lăsarea seriei, atunci când temperatura exterioară scade.

Umflarea camerei roții automobilului la presiunea $p = 4 \cdot p_0$ a fost făcută la temperatura exterioară $T_0 = 300K$. La lăsarea seriei, când temperatura devine $0,90 \cdot T_0$, domnul inginer Popescu constată că din nou presiunea din roată a scăzut, deși ventilul este bun și roata nu este spartă. Domnul Popescu își amintește formula Ernst August pentru calculul presiunii p_s de saturație a vaporilor de apă, ca funcție de temperatură

$$p_s = p_0 \cdot 1,32 \cdot 10^{-3} \cdot \exp\left(20,4 - \frac{5,13 \cdot 10^3}{T(K)}\right)$$

3.a.	Folosind informațiile furnizate, determină valoarea p_1 a presiunii în camera roții automobilului, după lăsarea seriei.	(1,5p)
-------------	---	--------

© Subiect propus de:

Delia Constanța DAVIDESCU, PhD



--

Foaie de Răspunsuri

Problema a II-a (10 puncte)

Pompă

1.a.	$v_k =$	$v_{40} =$	1,5p
1.b.	$\rho_k =$	$\rho_{40} =$	0,5p
1.c.	$x_{k+1} =$	$x_{41} =$	1,5p
1.d.	$p(x) =$		2,0p
	<i>Notă: Schița graficului $p = p(x)$ va fi inclusă în soluția problemei.</i>		
2.a.	Expresia numărului $k_0 =$	Valoarea $k_0 =$	1,0p
2.b.	$L_{total} =$	$L_{10, total} =$	2,0p
3.a.	$\rho_1 =$		1,5p
Total			10p