Problema nr. 1 (10 puncte)

Comutator MEMS

MEMS (Micro-electromechanical systems) sunt comutatoare mecanice miniaturale acționate electric (Figura 1).

Aplicarea unei tensiuni electrice pe armăturile dispozitivului poate conduce la închiderea circuitului liniei de transmisie Problema vă propune să studiați principiile funcționării unui astfel de dispozitiv.

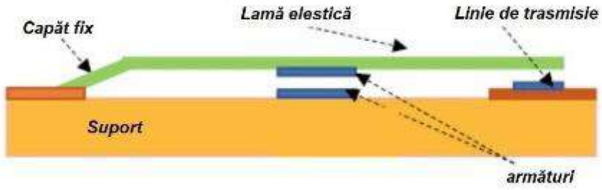


Figura 1

Sarcinile de lucru ale problemei se vor referi la comutatorul MEMS reprezentat schematic în *Figura* 2.

O lamă elastică paralelipipedică, fixată pe suport în partea dreaptă, are lungimea $L = 100\ \mu m$ (măsurată de la marginea din dreapta a suportului de fixare, marcată ca segment *AB*, până la capătul liber din partea stângă), lățimea $\ell = 3\ \mu m$ și grosimea $h = 0,5\ \mu m$. Lama elastică este confecționată din aluminiu, care are modulul de elasticitate Young $E = 70,0\ GPa$. O bandă conductoare este dispusă în partea stângă a suportului paralelipipedic al dispozitivului. Banda, legată la pământ, are lățimea $a = 40\ \mu m$, iar marginea sa din stânga și capătul din dreapta al lamei elastice sunt aliniate pe verticală.

În absența unui potențial electric aplicat, lama elastică se află în aer, la o distanță $D = 0,5\ \mu m$ (măsurată de la suprafața inferioară a lamei) de banda conductoare. În această situație lama elastică, aflată în poziție orizontală, este paralelă cu banda conductoare.

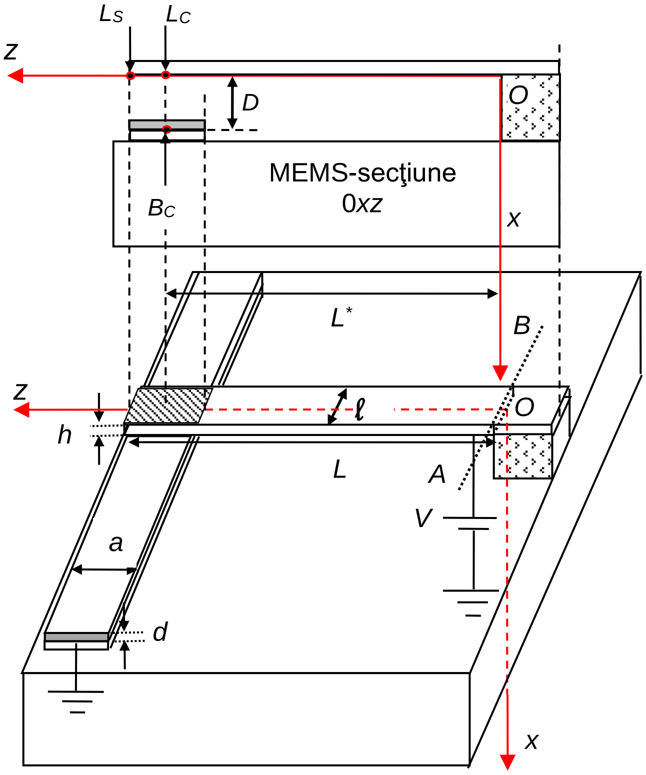


Figura 2. Schema MEMS

Banda conductoare are deasupra sa un strat dielectric de Si_3N_4, depus uniform. Stratul de dielectric are permitivitatea dielectrică relativă $\varepsilon_2 = 6$ și grosimea $d = 0,2\ \mu m$ (distanța dintre suprafața inferioară a lamei elastice aflată în poziție orizontală și suprafața în contact cu aerul a dielectricului este $D - d = 0,3\ \mu m$). Pentru aer, permitivitatea dielectrică relativă este $\varepsilon_1 = 1$, iar permitivitatea dielectrică a vidului este $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ F/m$.

Pentru descrierea modului de funcționare a comutatorului MEMS este necesară modelarea formei lamei elastice, supusă unor forțe deformatoare externe. În modelul Euler-Bernoulli se consideră că o lamă elastică lungă este formată din fibre de material, paralele cu axa de simetrie longitudinală a lamei nedeformate.

Ca rezultat al aplicării unor forțe externe, lama elastică se încovoaie și în fiecare secțiune a acesteia apar forțe interne. Deformarea este privită ca fiind rezultatul acestor forțe interne care rotesc (către o poziție de echilibru) fiecare secțiune transversală a liniei elastice. Rotația fiecărei secțiuni se produce în jurul unei axe conținute în planul respectivei secțiuni și care trece prin centrul de masă al secțiunii. Rotația secțiunilor face ca în lama elastică să apară fibre alungite și fibre scurtate, față de o fibră - fibra neutră - care nu își modifică lungimea (această fibră trece prin centrele de masă ale secțiunilor transversale).

În regim de deformare liniară a fibrelor, echilibrul unei porțiuni a lamei elastice se explică prin anularea rezultantei forțelor (interne și externe) precum și a rezultantei momentelor forțelor (interne și externe). În modelul Euler-Bernoulli se consideră că fiecare secțiune își păstrează forma și își menține neschimbată poziția pe axa perpendiculară pe direcția forței (axa $0z$ în *Figura* 2).

În modelarea dispozitivului, considerăm sistemul de referință dispus în planul vertical $0xz$ reprezentat în *Figura* 2. Axa $0z$ din planului vertical este orientată către stânga și este situată de-a lungul axei de simetrie longitudinale a lamei elastice, când aceasta se află în poziție orizontală. Axa $0x$ este orientată pe verticală în jos. Originea sistemului 0 se află pe fața inferioară a lamei, sub segmentul *AB* (care delimitează marginea din dreapta a lamei elastice).

Banda și lama se află „față în față" pe o suprafață dreptunghiulară cu aria $a \times \ell$ (vezi aria hașurată în *Figura* 2). Se introduc notațiile: B_C pentru punctul din centrul dreptunghiului $a \times \ell$ de pe bandă, L_C de coordonată $z = L^* = L - a/2$ pentru punctul în care verticala dusă din B_C intersectează lama elastică paralelă cu banda și L_S de coordonată $z = L$ pentru capătul din stânga al lamei elastice.

Când, în general, asupra unei lame elastice aflată în poziție orizontală care are coordonatele capetelor $(z = 0, x = 0)$ și $(z = L^*, x = 0)$ se aplică o forță externă deformatoare $\vec{F}$ perpendiculară pe lamă în $z = L^*$, condițiile de echilibru conduc (în teoria Euler-Bernoulli) la o ecuație diferențială a echilibrului, de forma:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2x(z)}{dz^2} = F \cdot \left(L^* - z\right) \qquad (1)$$

unde J este momentul de inerție al ariei secțiunii lamei elastice față de axa de rotație, conținută în planul acestei secțiuni și trecând prin fibra neutră, iar F este mărimea forței deformatoare. (Momentul de inerție al ariei unei suprafețe este definit ca suma tuturor produselor ariilor infinitezimale ale suprafeței cu pătratul distanței de la aria infinitezimală la axa de rotație).

Pentru caracterizarea dispozitivului vom introduce următoarele aproximații:

a) Suprafața $a \times \ell$ aflată la capătul din stânga al lamei elastice și suprafața $a \times \ell$ aflată sub aceasta pe banda conductoare formează un condensator cu armături plan paralele, pe care se acumulează sarcini electrice distribuite uniform. Astfel, condensatorul cu o armătură plan paralelă (formată de banda conductoare) și alta curbată (formată de lama elastică) este aproximat cu un condensator cu armături plan paralele. Pentru lama deformată, armătura superioară a condensatorului coboară odată cu L_C (pe distanța x).

b) Circuitele electrice sunt ideale.

c) Deformarea lamei datorată greutății proprii este neglijabilă.

d) Asupra porțiunii de lamă $z > L^*$ a dispozitivului nu acționează forțe deformatoare și, ca urmare, la deformare, porțiunea de lamă $L_C L_S$ se aliniază de-a lungul tangentei la lamă în punctul $z = L^*$, fără să își modifice lungimea.

Rezultatele numerice obținute cu datele numerice furnizate se prezintă prin rotunjire: i) la 3 zecimale (prima zecimală care apare în scriere este prima zecimală nenulă după virgulă) pentru valori subunitare și ii) cu 2 zecimale pentru valori supraunitare.

Sarcina de lucru 1 – Proprietăti mecanice si electrice ale MEMS

1.a.	Deduceți expresia momentului de inerție J al ariei secțiunii transversale a lamei elastice față de axa de rotație orizontală, din planul său, care trece prin fibra neutră.	(0,5 p)

1.b.	Considerând modelul Euler-Bernoulli prezentat, determinați expresia și valoarea constantei elastice K a lamei elastice exprimată prin raportul dintre forța deformatoare, considerată ca fiind cunoscută și aplicată în L_C, și deplasarea pe verticală a punctului L_C. Folosiți ecuația (1) si aproximația c).	(1,0 p)

Pentru cerințele următoare, lucrați în aproximațiile a), b) și c).

1.c.	Considerând că lama elastică se află în echilibru și nu atinge stratul dielectric de Si_3N_4, determinați expresia forței de atracție dintre lama elastică și banda conductoare, pentru o tensiune V aplicată între acestea, atunci când distanța dintre punctul L_C și banda conductoare este $D-x$ (L_C se deplasează din poziția orizontală a lamei elastice pe distanța x).	(1,5 p)

Sarcina de lucru nr. 2 – Functionarea MEMS

2.a.	Deduceți o expresie matematică, cu ajutorul căreia să se poată evalua deplasarea verticală a punctului L_C al lamei elastice pentru o tensiune aplicată V. Schițează un grafic care să ilustreze răspunsul dat. Comentați pe scurt posibilitatea existenței pozițiilor de echilibru ale lamei.	(3,0 p)

2.b.	Determinați domeniul de valori ale deplasării x a punctului L_C, pentru care forțele electrică și mecanică mențin lama elastică în echilibru ('echilibru mecano-electric').	(1,0 p)

2.c.	Deduceți expresia tensiunii electrice maxime V_{max}, de la care începând echilibrul mecano-electric al lamei elastice (definit la cerința 2.b.) nu mai poate fi realizat. Calculați valoarea tensiunii electrice V_{max}.	(0,5 p)

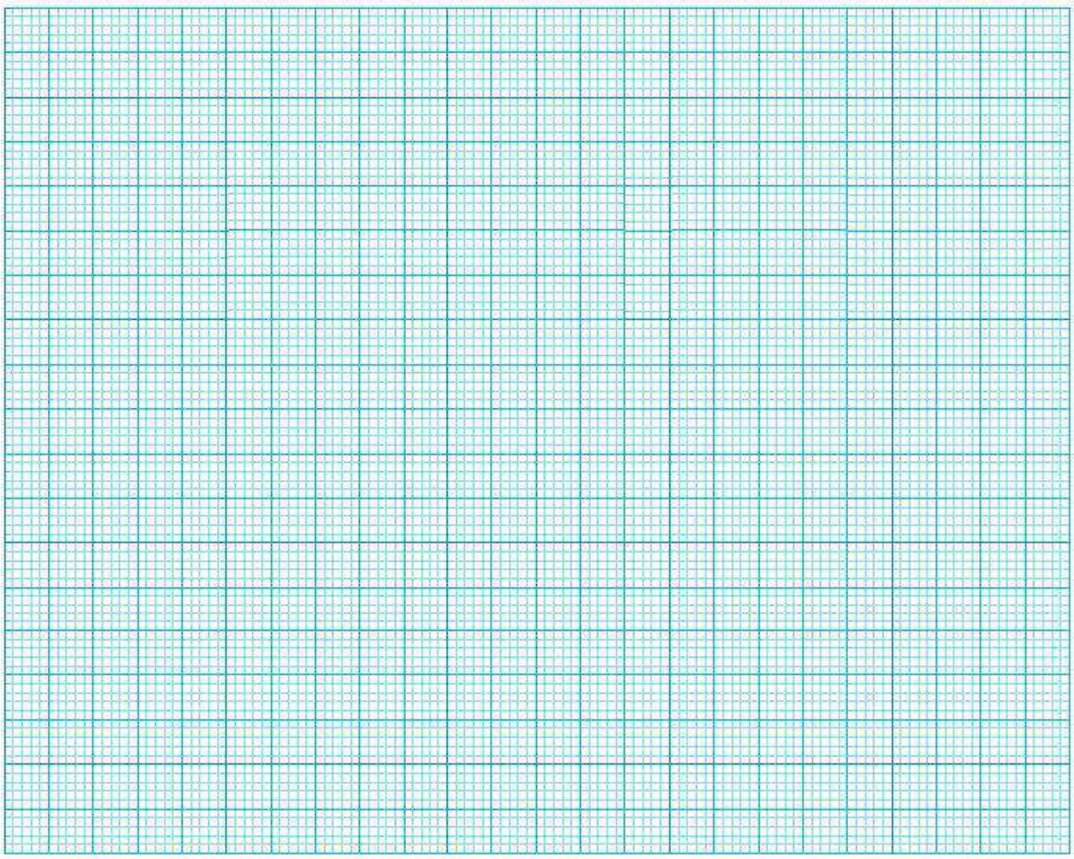
2.d.	Determinați expresia sarcinii electrice Q injectată de baterie în lama elastică, când tensiunea aplicată este V_{max}. Calculați valoarea sarcinii electrice Q.	(0,5 p)

Pentru cerința următoare considerați ca fiind valabile rezultatele cerințelor anterioare (obținute în aproximațiile a), b) și c)) și adăugați aproximația d) pentru calculul deplasării punctului L_S.

2.e.	Determinați expresia deplasării (pe verticală) a punctului L_S când tensiunea aplicată este V_{max}. Calculați valoarea deplasării punctului L_S. Verificați dacă - pentru datele din problemă - dispozitivul poate funcționa ca un comutator MEMS, adică dacă lama atinge stratul dielectric numai pentru tensiuni V mai mari decât V_{max}.	(2,0 p)

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 1 (10 puncte)
Comutator MEMS

1.a.	Expresia momentului de inerție $J =$	0,5p
1.b.	Expresia constantei elastice $K =$ Valoarea constantei elastice $K =$	1,0p
1.c.	Expresia forței de atracție $F =$	1,5p
2.a.	Expresia dependenței deplasării lamei elastice $x(V)$ Reprezentarea grafică  Scurt comentariu asupra existenței pozițiilor de echilibru ale lamei	3,0p

2.b.	Domeniul de valori ale deplasării $x \in$	1,0p
2.c	Expresia tensiunii electrice minime $V_{max} =$ Valoarea tensiunii electrice minime $V_{max} =$	0,5p
2.d.	Expresia sarcinii electrice $Q =$ Valoarea sarcinii electrice $Q =$	0,5p
2.e.	Bifează răspunsul pe care îl consideri corect: Dispozitivul poate funcționa ca un comutator MEMS — Da / Nu O scurtă argumentare pentru alegerea răspunsului, pe care îl consideri corect	2,0p
	Total	10p

Problema nr. 2 (10 puncte)
Electroni si radiatii electromagnetice

Radiația electromagnetică și particulele încărcate electric interacționează. Mișcarea unui electron poate fi influențată de radiația electromagnetică. La rândul său, electronul poate genera radiație electromagnetică – atunci când este frânat și chiar și atunci când se deplasează cu viteză constantă traversând suprafața de separare dintre două medii cu indici de refracție diferiți.

O modalitate eficientă pentru tratarea interacțiunii dintre electron și radiația electromagnetică este considerarea sa ca fiind o ciocnire a electronului cu un foton. Dar, în anumite procese, fotonul poate fi absorbit de electron, cedându-i acestuia întreaga sa energie.

În rezolvarea diferitelor sarcini de lucru ale acestei probleme poți folosi, după caz, datele din tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1

Masa de repaus a electronului	$m_0 = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg$
Masa de repaus a protonului	$m_{p,0} = 1{,}67 \times 10^{-27}\,kg$
Valoarea sarcinii electrice elementare	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,C$
Constanta Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,J \cdot s$
Viteza luminii în vid	$c_0 = 3{,}00 \times 10^{8}\,m \cdot s^{-1}$

Sarcina de lucru nr. 1 - Ciocniri

Un corp punctiform cu masa m_1 și cu energia cinetică E_1 ciocnește elastic, central, un corp punctiform cu masa $m_2 = x \cdot m_1$ aflat în repaus. După ciocnire, corpul cu masa m_2 are energia cinetică $E_2 = f \cdot E_1$.

Pentru a răspunde la cerințele sarcinilor de lucru 1.a. și 1.b. folosește un calcul nerelativist.

1.a.	Determină expresia dependenței $f = f(x)$, $x \in (0,\infty)$	(1,0 p)
1.b.	Calculează valorile pentru $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $f(1)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Schițează un grafic al dependenței $f = f(x)$.	(1,0 p)

Pentru sarcinile de lucru 1.c., 1.d., 1.e. și 1.f. exprimă, după caz, rezultatele pe care le-ai obținut, în funcție de datele din tabelul nr. 1 și de alte mărimi specificate în enunțul acestei sarcini de lucru.

1.c.	Determină expresia frecvenței $\nu_{0,f}$ și a lungimii de undă $\lambda_{0,f}$ asociate unui foton, care are masa egală cu masa de repaus a electronului. Calculează valorile pentru frecvența $\nu_{0,f}$ și pentru lungimea de undă $\lambda_{0,f}$.	(0,5 p)

În cesiu, un electron este „legat” de metal, aflându-se într-o „groapă de potențial” cu adâncimea $L = 1{,}60 \times 10^{-19}\,J$. Electronul, care se mișcă în material cu viteza $v_T = 100\ m \cdot s^{-1}$, este lovit de un foton din domeniul vizibil, care-i cedează toată energia sa. Lungimea de undă (din albastru) a fotonului este $\lambda = 500\,nm$.

1.d.	Dedu valorile masei m_f, impulsului p_f și energiei E_f pentru fotonul din domeniul vizibil.	(0,3 p)

1.e.	Determină valorile masei m_e, impulsului p_e și energiei cinetice E_e pentru electron înainte de ciocnire.	(0,3 p)

1.f.	Dedu valoarea vitezei v_e a electronului care părăsește metalul.	(0,4 p)

Sarcina de lucru nr. 2 - Împrăștiere Compton

Un foton de lungime de undă λ_i este împrăștiat pe un electron liber în mișcare. Ca urmare, electronul se oprește. Fotonul rezultat, de lungime de undă λ_0, împrăștiat sub unghiul $\theta = 60°$ față de direcția fotonului incident, este din nou împrăștiat de un al doilea electron, aflat în repaus. În al doilea proces de împrăștiere, fotonul de lungime de undă $\lambda_f = 1{,}25 \times 10^{-10}\, m$ este deviat sub un unghi $\theta = 60°$, în raport cu direcția fotonului de lungime de undă λ_0. Consideră că cele două ciocniri se desfășoară în același plan.

Pentru a răspunde cerințelor din cadrul sarcinii de lucru nr. 2, ai în vedere să exprimi, după caz, rezultatele pe care le-ai obținut folosind notațiile din tabelul nr. 2, valorile mărimilor specificate în cadrul acestei sarcini de lucru și unele date din tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 2

Fotoni	Foton inițial (înainte de prima împrăștiere)	Foton - după prima împrăștiere	Foton final	***Electroni***	Primul electron înainte de ciocnire	Primul electron după ciocnire	Al doilea electron înainte de ciocnire	Al doilea electron după ciocnire
Impuls	$\vec{p}_i$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_f$	Impuls	$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$
Energie	E_i	E_0	E_f	Energie	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
Lungime de undă	λ_i	λ_0	λ_f	Viteză	$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$

2.a.	Realizează schițe care să conțină reprezentări ale celor două procese. Notează pe schițele realizate mărimile fizice relevante.	(0,5 p)

2.b.	Determină expresia și valoarea lungimii de undă λ_0 a fotonului, care ciocnește electronul în repaus.	(1,0 p)

2.c.	Dedu expresia și valoarea în eV a energiei cinetice de recul E_{2e} pentru electronul ciocnit în al doilea proces.	(1,0 p)

2.d.	Determină expresia lungimii de undă de Broglie $\lambda_{B,1}$ a primului electron înainte de ciocnirea cu primul foton. Calculează valoarea lungimii de undă de Broglie $\lambda_{B,1}$.	(1,0 p)

Sarcina de lucru 3 - Radiatie Cherenkov

Atunci când o particulă încărcată electric se deplasează printr-un material dielectric, având indicele de refracție n, dielectricul se polarizează, datorită câmpului electromagnetic al particulei. De obicei efectele acestor polarizări locale succesive se suprapun distructiv, perturbația mediului se relaxează, în timp ce particula se mișcă mai departe.

Dacă însă viteza v a particulei este mai mare decât viteza de fază c a luminii în mediul respectiv $(c = c_0/n)$, atunci perturbația produsă de mișcarea particulei nu se mai poate amortiza.

Acest comportament este datorat faptului că timpul de reacție al mediului nu este suficient de scurt și ca urmare perturbația rămâne „în spatele" particulei. Particula în mișcare vine mereu din mediul perturbat (care are un anumit indice de refracție) și intră în mediul neperturbat (care are alt indice de refracție). Diferența dintre indicii de refracție face ca particula în mișcare cu viteză practic constantă să emită radiație.

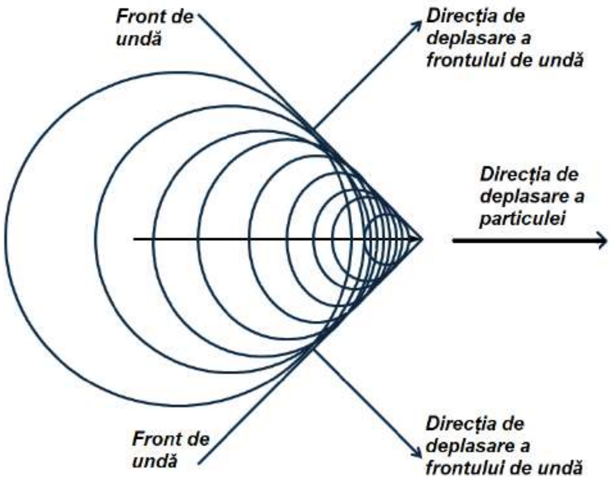


Figura nr. 1

Ca urmare, conform principiului Huygens, în mediu apare un front conic de unde electromagnetice în zona în care undele sferice generate se suprapun pentru că se propagă mai lent decât sunt generate, în timp ce, în spatele acestui front de undă undele sferice nu se mai compun.

Pentru a răspunde cerințelor din cadrul sarcinii de lucru nr. 3, ai în vedere să exprimi, după caz, rezultatele pe care le-ai obținut, în funcție de datele din tabelul nr. 1 și de alte mărimi specificate în enunțul acestei sarcini de lucru.

3.a.	Determină expresia unghiului θ dintre direcția de propagare a luminii și direcția deplasării particulei încărcate electric.	(0,5 p)

Radiația Cherenkov este percepută ca o strălucire albastră, care apare atunci când particule încărcate electric care compun atomii se mișcă într-un anumit mediu cu viteze mai mari decât cea a luminii.
În apă, lumina se propagă cu o viteză reprezentând 75% din viteza sa din vid, dar există particule care nu încetinesc la fel de mult și ajung să se miște mai repede decât lumina. Ori de câte ori se întâmplă acest lucru, apare o strălucire albastră sau violetă.

De exemplu, radiația Cherenkov apare în apa care înconjoară combustibilul din reactoarele nucleare.

Datorită energiilor mari necesare pentru apariția radiației Cherenkov, fotonii generați pentru dezexcitarea atomilor excitați de particula încărcată, corespund unor unde care au frecvențe înalte și lungimi de undă scurte, care sunt tipice pentru culorile violet și albastru.

3.b.	Determină valoarea energiei cinetice minime $E_{c,e}$ (în electronvolți) a electronului capabil să producă radiație Cherenkov, într-un mediu cu indicele de refracție $n_1 = 1,60$.	(1,0 p)

3.c.	Dedu valoarea energiei cinetice minime $E_{c,p}$ (în electronvolți) a protonului capabil să producă radiație Cherenkov în același mediu.	(0,5 p)

În cele ce urmează, consideră că într-un un mediu cu indicele de refracție $n_2 = 1,50$ se deplasează electroni capabili să producă radiație Cherenkov. Unghiul dintre direcția deplasării electronului prin acest mediu și direcția propagării radiației Cherenkov generate în mediul respectiv este $\theta = 30°$.

3.d.	Determină valoarea energiei cinetice minime $E_{cin,e}$ (în electronvolți) a electronilor capabili să producă radiație Cherenkov în acest mediu.	(1,0 p)

© Subiect propus de:
Delia Constanța DAVIDESCU, PhD
Adrian DAFINEI, PhD

Foaie de Răspunsuri

Problema nr. 2 (10 puncte)
Electroni si radiatii electromagnetice

1.a.	Expresia dependenței $f(x) =$	1,0p
1.b.	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ $\qquad$ $f(1) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ Reprezentarea grafică a dependenței $f = f(x)$	1,0p
1.c.	Expresia frecvenței $\nu_{0,f} =$ $\qquad$ Valoarea frecvenței $\nu_{0,f} =$ Expresia lungimii de undă $\lambda_{0,f} =$ $\qquad$ Valoarea lungimii de undă $\lambda_{0,f} =$	0,5p
1.d.	Valoarea masei fotonului $m_f =$ Valoarea impulsului fotonului $p_f =$ Valoarea energiei fotonului $E_f =$	0,3p

1.e.	Valoarea masei electronului înainte de ciocnire $m_e =$ Valoarea impulsului electronului înainte de ciocnire $p_e =$ Valoarea i energiei cinetice a electronului înainte de ciocnire $E_e =$	0,3p
1.f.	Valoarea vitezei electronului care părăsește metalul $v_e =$	0,4p
2.a.	Reprezentare schematică a celor două procese Prima ciocnire / A doua ciocnire	0,5p
2.b.	Expresia pentru $\lambda_0 =$ Valoarea pentru $\lambda_0 =$	1,0p
2.c.	Expresia pentru $E_{2e} =$ Valoarea pentru $E_{2e} =$	1,0p
2.d.	Expresia pentru $\lambda_{B,1} =$ Valoarea pentru $\lambda_{B,1} =$	1,0p
3.a.	Expresia unghiului $\theta =$	0,5p
3.b.	Valoarea energiei cinetice minime a electronului $E_{c,e} =$	1,0p
3.c.	Valoarea energiei cinetice minime a protonului $E_{c,p} =$	0,5p
3.d.	Valoarea energiei cinetice minime a electronului $E_{cin,\,e} =$	1,0p
	Total	10p